第３講　波動

5

図１に示すように，大気圧の空気中に，ある一定の周波数の音を出す音源があり，この音源から$+x$方向の任意の位置にマイクロフォンを置き，音源から発生させた音による空気圧力を計測した。音源の位置を$x=0$として以下の問いに答えなさい。

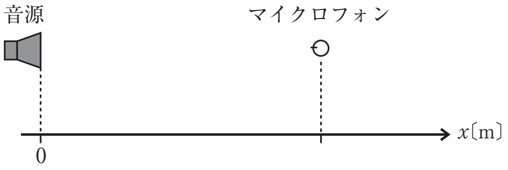

図１

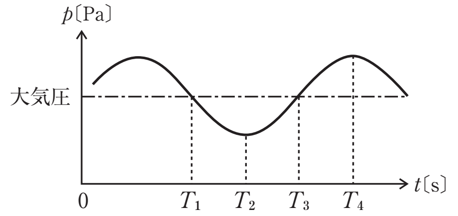

図２

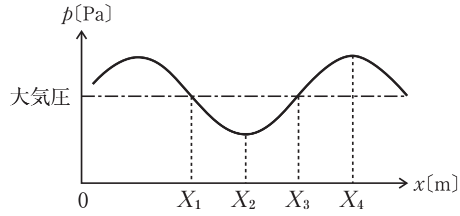

図３

(1)　マイクロフォンの位置を固定して時間t〔s〕と圧力p〔Pa〕との関係を計測し，図２のようなグラフを得た。大気圧と等しい圧力を計測した時刻を$t=T_1$，T_3，圧力が最小となる時刻を$t=T_2$，最大となる時刻を$t=T_4$とする。この時の空気の様子を説明する次の文章の空欄に適切な語句を入れなさい。但し，(ア)〜(エ)には＋または－のどちらかを，また(オ)には，T_1，T_2，T_3，T_4のいずれかを入れなさい。

圧力が最大となる時刻T_4の直前では，空気は［(ア)］x方向に変位し，直後では［(イ)］x方向に変位する。また圧力が最小となる時刻T_2では，この直前で空気は［(ウ)］x方向に変位し，直後では［(エ)］x方向に変位する。つまり，時刻T_2とT_4では，空気の変位方向が変わる。以上より，空気が最も$-x$方向へ変位する時刻は，［(オ)］となることがわかる。

(2)　つぎに，ある時刻の，音源から距離x〔m〕離れた位置における圧力p〔Pa〕を図３のように得た。大気圧と等しい圧力を得た位置を$x=X_1$，X_3，圧力が最小となる位置を$x=X_2$，最大となる位置を$x=X_4$とする。この時の空気の様子を説明する次の文章の空欄に適切な語句を入れなさい。但し，(カ)〜(ケ)には＋または－のどちらかを，また(コ)にはX_1，X_2，X_3，X_4のいずれかを入れなさい。

圧力が最大となる位置X_4のすぐ近くを考えると，$-x$方向側では空気は［(カ)］x方向に変位し，$+x$方向側では［(キ)］x方向に変位している。また圧力が最小となる位置X_2のすぐ近くを考えると，$-x$方向側では，［(ク)］x方向に変位し，$+x$方向側では［(ケ)］x方向に変位している。つまり，位置X_4及びX_2では，空気の変位方向が変わる。以上より，空気が最も$-x$方向に変位する位置は，［(コ)］となることがわかる。

6

空気中の音速は，力学的考察から圧力Pを密度ρで微分したものの平方根$(dP/d\rho)^{1/2}$に等しいことが判明した。そこでニュートンは，音波が伝わるときの空気の膨張・圧縮は等温的に行われると考え，空気中の音速としてある式を得た。この式は，空気中の音速は圧力によらないこと，室温近辺では温度に対して音速は一様に増大することを示すことはできたが，実測値とは異なる値を示していた。

約100年後，ラプラスは音波が伝わるときの空気の膨張・圧縮は，十分速い過程であるのでまわりの空気と熱のやり取りを行う時間はなく，断熱的に行われると考え，正しい式を得た。微分を用いなくても微小量の比と近似式を適切に利用することによって微分と同じ結果を得ることができるので，以下，圧力Pの密度ρでの微分$dP/d\rho$を微小量の比$\varDelta P/\varDelta\rho$に置き換え，近似式を用いてニュートンとラプラスの考えをたどってみよう。

空気は理想気体とし圧力をP，密度をρ，平均分子量をμ，絶対温度をT，等圧モル比熱と等積モル比熱の比をγ，気体定数をRとする。xの絶対値が1に比べて十分小さく，nの絶対値があまり大きくないとき，即ち$|nx| \ll 1$のとき，近似式

$$(1+x)^n \fallingdotseq 1+nx$$

が利用できる。0℃＝273Kとする。

(1) 理想気体の状態方程式は通常P，R，Tの他，気体のモル数や気体の体積を用いて表されるが，後の二つは気体の質量を考えると，密度と分子量で置き換えることができる。空気の状態方程式を，P，ρ，μ，R，Tを用いて表せ。

(2) ニュートンの考えたように，等温過程での圧力Pと密度ρの微小変化の比$\varDelta P/\varDelta\rho$を$\mu$，$T$，$\gamma$，$R$のうち適当なものを用いて表せ。$\varDelta$のつく微小量のうち，2次以上の微小量はあっても無視せよ。

(3) (2)で求めた式によると，温度が一定であれば音速が圧力によらないことを示せ。

(4) 同じく(2)で求めた式によると，室温近辺t℃では，音速はtの一次関数で表されることを，近似を用いて示せ。

(5) ラプラスによれば，音波が伝わるときの空気の膨張・圧縮は断熱過程である。

P，V，γを用いた断熱過程に関するポアソンの式

$$PV^{\gamma}＝一定$$

を，P，ρ，γを用いて一定となる量を示す式に書き換えよ。

⑹　⑸で求めた式に，Pの代わりに$P+\Delta P$を，ρの代わりに$\rho+\Delta\rho$を代入してもよいことから，$\Delta P/\Delta\rho$を求めよ。近似式を用い，２次以上の微小量はあっても無視せよ。

⑺　空気中の音速の27℃での実測値は348m/sである。⑹で求めた式の近似から27℃近くのt℃における音速v_tm/sを

$$v_t=348+\alpha(t-27)$$

という形で表したい。αm/s℃の値を有効数字2桁で求めよ。

第３講　解答

5

(ア) −　(イ) ＋　(ウ) ＋　(エ) −　(オ) T_3

(カ) ＋　(キ) −　(ク) −　(ケ) ＋　(コ) X_1

6

(1) $\dfrac{P}{\rho}=\dfrac{RT}{\mu}$

(2) $\dfrac{\Delta P}{\Delta\rho}=\dfrac{RT}{\mu}$

(3) 音速は$\sqrt{\dfrac{RT}{\mu}}$なので，圧力によらない。

(4) $\sqrt{\dfrac{273R}{\mu}}\left(1+\dfrac{t}{546}\right)$

(5) $P\rho^{-\gamma}=$ 一定

(6) $\dfrac{\Delta P}{\Delta\rho}=\dfrac{\gamma RT}{\mu}$

(7) 0.58〔m/s℃〕